Title	Hele-Shaw移動境界問題の数理(応用解析チュートリアル,講義ノート)
Author(s)	木村, 正人
Citation	物性研究 (2002), 78(2): 159-171
Issue Date	2002-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97206
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Hele-Shaw 移動境界問題の数理

木村 正人
九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: masato@math.kyushu-u.ac.jp

目次

1 ヘレショウ流とその数理モデル

1.1 ヘレショウ流の始まり

1898 年、物理学者 H. S. ヘレショウ (H. S. Hele-Shaw) が雑誌ネイチャーに書いたごく短い論文文 [14] が、現在ヘレショウ流と呼ばれている流体が研究されたはじまりとされている。そこで Hele-Shaw は、狭い間隔をあけて水平に置かれた 2 枚のガラス板の間をゆっくりと 2 次元的に流れる非圧縮性の高粘性の流体の実験を行った。現在、そのような流れはヘレショウ流、彼が考案した実験装置はヘレショウ セルと呼ばれている。

彼はヘレショウ流を可視化し、それが、それまでに複素関数論などによって良く研究されていた縮まない粘性の無い流体（完全流体）の渦無しの定常流れと同じ流線を描くことを指摘した。それまで粘性を無視できるサラサラした（水のような）流体が満たすと考えられていた完全流体の微分方程式 (4.3), (4.4) の解が描く図と寸分違わぬ写真が（油のように）高い粘性を持つ流体の実験で得られたのである。[1]

水のよううなサラサラした流体は実験の可視化が難しく、現代でも特別な技術の必要とされる作業である。それゆえに数理モデルやその数学解析が重要視される訳だが、その頃はおよそ百年前、コンピュータなど無い時代である。非圧縮完全流体の定常渦無し流れの理論はあっても、そ

[1] 正確には、粘性が無視できるかどうかは流体の粘性率だけではなく、その流れの代表的長さ、代表的速度、密度の比であるレイノルズ数によって決まる。

れを正確に図に描くのは容易ではなかった。ところが、比較的可視化の容易な粘性流体がヘレショウ セルにおいては完全流体と同じ流線を持つことを発見したヘレショウは、それを完全流体の流線を容易に可視化する装置として提案している。これは完全流体に対する、粘性流体を使った一種の実験モデルまたは可視化モデルであったといえる。

1.2 ヘレショウ流の数理モデル

詳細は [21] に譲るが、ヘレショウ流は次のような方程式を近似的に満たすことが知られている。$\Omega \in \mathbf{R}^2$ を粘性流体の占める 2 次元領域とする。

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(x,y), \\ v(x,y) &= -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x,y), \end{aligned} \qquad (x,y) \in \Omega,$$

ここで、$h > 0$ は微小な 2 枚の板の間隔、$(u(x,y), v(x,y))$ は厚み方向に平均された x 及び y 方向の流速場、$\bar{p}(x,y)$ は粘性流体の圧力場である。ただし、h が小さいことから近似的に、流速場の z 方向成分は 0 と置かれ、$\bar{p}$ は z には依らないものとしている。$\mu > 0$ は粘性率と呼ばれる流体の性質から決まる定数で、μ が大きいほど、粘性が高い。これは、圧力の高いところから圧力の低いところへ流れが生じていることを表している。簡単のため、$p = \frac{h^2}{12\mu}\bar{p}$ とおくと、非圧縮性条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$

と合わせて、

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta p(x,y) &= 0, \\ u(x,y) &= -\frac{\partial p}{\partial x}(x,y), \\ v(x,y) &= -\frac{\partial p}{\partial y}(x,y), \end{aligned} \right. \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1.1}$$

が成り立つ。これは 2 次元の非圧縮完全流体の渦無しの定常流れが満たす方程式と全く同じものである。但し、この場合は圧力場が速度ポテンシャルになっているが、完全流体の場合の速度ポテンシャルにはそのような関係は無い。

1.3 平面内の動く曲線の幾何

ここで、時間によって変化する流体境界の動きを記述する幾何学的量についてまとめておこう。

ままず、2 次元平面内の滑らかな閉曲線 Γ を考えよう。Γ で囲まれた内部の有界な領域を Ω とする。曲線 Γ の媒介変数表示

$$\Gamma = \{(x(s), y(s)) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \le s < l\},$$

を考える。但し、$x(s)$, $y(s)$ は周期 l の滑らかな周期関数 $(x(s+l) = x(s))$ で、媒介変数 s は反時計回りに、$x'(s)^2 + y'(s)^2 \neq 0$ となるようにとってあるものとする。Γ の外向き単位法線ベクトル

(Γに垂直な長さ1のベクトル) を $\boldsymbol{n}(x,y)=(n_1,n_2)$、曲率を $\kappa(x,y)$ $((x,y)\in\Gamma)$ とすると、それらは次のように表される。

$$n_1=\frac{y'(s)}{\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}},\qquad n_2=\frac{-x'(s)}{\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}},\qquad \kappa=\frac{y'(s)xx''(s)-x'(s)y''(s)}{(\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2})^3}.$$

これらは、媒介変数表示の取り方によらない幾何的な量であることが知られている。

次に、平面内を時刻tとともに変化する閉曲線$\Gamma(t)$について考えよう。外向き単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}(x,y,t)$ 及び曲率 $\kappa(x,y,t)$ $((x,y)\in\Gamma(t))$ は前節と同様に定義される。曲線 $\Gamma(t)$ の媒介変数表示

$$\Gamma(t)=\{(x(s,t),y(s,t))\in\mathbf{R}^2;\ 0\le s<l(t)\},$$

を使って、$\Gamma(t)$ の外向き法線方向速度 $V_n(x,y,t)$ $((x,y)\in\Gamma(t))$ が次のように定義される。

$$V_n=\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right)=n_1\frac{\partial x}{\partial t}+n_2\frac{\partial y}{\partial t}.$$

V_n は曲線が変化する速度 $(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t})$ の法線方向 $\boldsymbol{n}$ の成分で、曲線の形の変化を表す量である。一般に媒介変数表示の時間微分 $(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t})$ は $(x(s,t),y(s,t))$ の選び方に依存するが、V_n は媒介変数表示の選び方によらない幾何学的な量である。

また、$\Gamma(t)$ で囲まれる領域 $\Omega(t)$ の面積を $A(t)$、$\Gamma(t)$ の周長を $L(t)$ とする。

$$A(t)=\int\int_{\Omega(t)}dxdy,\qquad L(t)=\int_{\Gamma(t)}d\sigma.$$

証明は省略するが、それらの時間微分は次のように表される。

$$A'(t)=\int_{\Gamma(t)}V_n d\sigma,\qquad L'(t)=\int_{\Gamma(t)}\kappa V_n d\sigma. \tag{1.2}$$

$A(t)$ や $L(t)$ は媒介変数表示によらない幾何学的な量なので、その微分も幾何学的な量 V_n や κ によって表されるのは自然である。

1.4 フィンガリング現象

ヘレショウ セルにおいて、粘性流体の占める領域が時間によって変化しているとき、その粘性流体と空気の間の境界はしばしば興味深いパターンをつくることが知られている。このような自由に変化する境界を自由境界という。

一般に、粘性流体の占める領域が広がっていくとき ($V_n>0$のとき) はその境界はより平らになりながら安定に動くのに対し、粘性流体の占める領域が縮まる場合 ($V_n<0$のとき) には、しばしば、指状にその境界が伸びる現象が観察される。これはフィンガリング現象と呼ばれている。

フィンガリング現象は、ヘレショウ セル以外でも、空気や水などの粘性の低い流体が高粘性の流体を押すような状況で、しばしば観察される。管に詰まったどろっとした液体 (例えばマヨネーズやジャムのような) を管に空気を押し込んで押し出すことを考えよう。このとき管が細ければ液体は一様に押し出されるが、管がある程度太く空気の勢いが強ければ一様には押し出されず、空気が指のような形でマヨネーズに穴をあけて進むだろう。

より切実な問題としては、地下の石油層にたまった石油を井戸を掘って採掘するときに、このフィンガリング現象が問題になっている。石油層の上で井戸を掘ると、最初は石油層の内部圧力

により石油が噴出するが、石油を採掘するにつれ内部圧力が下がり、まだ石油が残留しているにもかかわらず石油が出て来なくなるという事態がおきる。この場合、周囲に別の井戸を掘り、そこから水を注入することによって内部圧力を上げ、残った石油を回収しようとする方法がとられる。しかし、水を注入するにつれて、まだ石油が地下に残留しているにもかかかわらず、石油よりも水ばかりが井戸から回収されるという事態が起きた。これは一種のフィンガリング現象によるもので、注入した水が一様に石油を押すのではなく、水の占める領域が何本かの指状の水路となって石油生産井戸に伸びた結果起きたものであることがわかった。このような例からもわかるように、フィンガリング現象の起きるメカニズムを調べることは重要である。現在では、ヘレショウ流の自由境界の動きは、このようなフィンガリング現象のメカニズムを調べるための最も単純化された実験モデルと数理モデルを提供するものとして、盛んに研究がすすめられている。

1.5 ヘレショウ流の自由境界の数理モデル

自由境界があるときのヘレショウ流を表す数理モデルを考えよう。ヘレショウ流の流速場が $-\nabla p$ で与えられることから、自由境界 $\Gamma(t)$ の外向き法線方向速度 V_n は

$$V_n(x,y,t) = -\boldsymbol{n}(x,y,t)\cdot\nabla p(x,y,tt) = -\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y,t), \qquad (x,y)\in\Gamma(t), \tag{1.3}$$

と表される。

実際に自由境界が動くには、吹き込む息や注入する水に相当する何か駆動力が必要である。ここでは1点からストローのようなもので流体を吹き入れたり、逆に吸い出したりする状況の数理モデルを考えよう。ストローの位置を原点とし、単位時間あたりに吹き入れる流体の（面積）量を $q(t)$ とする。（体積量としては $hq(t)$ になる）次のような数理モデルが考えられる。

$$-\Delta p(x,y,t) = q(t)\delta(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega(t), \tag{1.4}$$

ここで $\delta(x,y)$ は原点以外では値は0で、原点に集中した正の無限大の値を持ち、任意の連続関数 $f(x,y)$ に対し

$$\int\int \delta(x,y)f(x,y)dxdy = f(0,0),$$

という性質を持つ仮想的な関数で、ディラックのデルタ関数と呼ばれるものである。普通の各点的に値を持つ関数ではないが、1点に集中しているような現象を表すのに使われる一般化された意味での関数である。物理学などでは昔から使われてきたが、現在では数学においてもその厳密な意味付けが行われ、普通の関数と同じように計算を行うことが出来ることが知られている。式(1.4) は次と同値である。

$$\Delta p(x,y,t) = 0 \qquad (x,y)\in\Omega(t), (x,y)\neq(0,0),$$

$$p(x,y,t) + \frac{q(t)}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}\text{が調和関数}$$

式 (1.4) の正当性を次のようにして確認してみよう。今、粘性流体の占める領域 $\Omega(t)$ は有界で滑らかかつ滑らかに動く曲線 $\Gamma(t)$ によって囲まれているもものとする。また、流体の出入りする原点は $\Omega(t)$ に含まれているものとする。条件 (1.3) と (1.4) を仮定すると、$\Omega(t)$ の面積 $A(t)$ の時間微分は、公式 (1.2) とグリーンの公式により、

$$A'(t) = \int_{\Gamma(t)} V_n d\sigma = -\int_{\Gamma(t)}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma = -\int\int_{\Omega(t)}\Delta p dxdy = q(t)\int\int_{\Omega(t)}\delta(x,y)dxdy = q(t),$$

となり、これを積分して次の等式が得られる。

$$A(t) = A(0) + \int_0^t q(\tau)d\tau.$$

これは注入した液体の分だけ面積が増えることを意味する一種の体積保存則である。

また、空気層の圧力（大気圧）を p_0（定数）とすると、自由境界 $\Gamma(t)$ 上で流体の圧力と大気圧がつりあっていいるものとすると、

$$p(x,y,t) = p_0, \qquad (x,y) \in \Gamma(t),$$

が成り立たなければならない。ところがあとで見るように、フィンガリング現象が起きるような状況下では $\Gamma(t)$ 上に働く表面張力効果を無視することが出来ない。その効果で $\Gamma(t)$ の長さを短くしようとする力が次のようにその曲率に比例して働くことが知られている。

$$p(x,y,t) = p_0 + \beta\kappa(x,y,t), \qquad (x,y) \in \Gamma(t), \tag{1.5}$$

ここで、β は 0 以上の流体の性質によって定まる定数で、表面張力と呼ばれる。表面張力が大きいほど、自由境界の形は凸凹を無くし、より丸くなろうとする。

表面張力の効果を次のように調べてみよう。$\Omega(t)$ と $\Gamma(t)$ は上と同様とする。条件 (1.3) と (1.4), (1.5) を仮定するると、$q(t) = 0$ かつ $\beta > 0$ のとき、$\Gamma(t)$ の周長 $L(t)$ の時間微分は、公式 (1.2) とグリーンの公式により、

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_{\Gamma(t)} \kappa V_n d\sigma = -\frac{1}{\beta}\int_{\Gamma(t)} (p-p_0)\frac{\partial p}{\partial n}d\sigma \\ &= -\frac{1}{\beta}\int\int_{\Omega(t)} \mathrm{div}((p-p_0)\nabla p)dxdy = -\frac{1}{\beta}\int\int_{\Omega(t)} |\nabla p|^2 dxdy < 0, \end{aligned}$$

となり、流体の出入りが無く、表面張力が正のときには自由境界の周長は表面張力の効果により単調に短くなっていくことがわかる。

上記の数理モデルをまとめると、次のような問題が出来上がる。

Problem 1.1 ヘレショウ流の自由境界問問題 平面内の原点を含む有界領域 Ω_0 と、$q(t)$ $(t \geq 0)$ 及び $\beta \geq 0$ が与えられているとき、次を満たす $\Omega(t)$ と $p(x,y,t)$ $((x,y) \in \Omega(t),\ t \geq 0)$ を求めよ。

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta p(x,y,t) &= q(t)\delta(x,y), && (x,y) \in \Omega(t),\ t \geq 0, \\ p(x,y,t) &= p_0 + \beta\kappa(x,y,t), && (x,y) \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ V_n(x,y,t) &= -\frac{\partial p}{\partial n}(x,y,t), && (x,y) \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ \Omega(0) &= \Omega_0 \end{aligned} \right.$$

$p(x,y,t) - p_0$ を改めて $p(x,y,t)$ と書くことにすると、一般性を失わずに $p_0 = 0$ と仮定しても良いので、以後 $p_0 = 0$ として考える。

2 等角写像によるヘレショウ自由境界問題の定式化

本節では、表面張力を考慮しない場合のヘレショウ自由境界問題（Problem 1.1 で $\beta = 0$ としたもの）に対する等角写像による定式化について、解説を行う。

前節で述べたように、ヘレショウ流れの数理モデルである (1.1) は非圧縮完全流体の渦無しの定常流れのそれと完全に一致する。完全流体の場合に良く知られた等角写像を用いた複素関数論的手法が、ヘレショウ自由境界問題に対しても、使われている。

まず等角写像を応用して、圧力場のついての方程式に相当する、次の境界値問題を解くことを考えよう。Ω と Γ を境界とする有界領域とし、原点が Ω に含まれているものとする。そのとき次の境界値問問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta p(x,y) &= q\delta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ \quad p(x,y) &= 0, \qquad\qquad (x,y) \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

Ω の含まれる平面を $z-$ 複素平面 $(z = x + iy)$ と同一視し、条件 $f(0) = 0$, $f'(0) = c > 0$ を満たす $\zeta-$ 複素平面の単位円盤から Ω への等角写像 $z = f(\zeta)$ を考える。圧力場 $p(z)$ の $z = f(\zeta)$ による単位円盤への引き戻し $p(f(\zeta))$ を考えよう。$f(\zeta)$ の原点のまわりでのテイラー展開を考えると、ある単位円盤上の正則関数 $\varphi(\zeta)$ が存在して、$f(\zeta) = \zeta\varphi(\zeta)$ と書ける。また、$\varphi(\zeta) \neq 0$ である。これより単位円盤 $|\zeta| \leq 1$ の上で、

$$\begin{aligned} p(f(\zeta)) &= \frac{q}{2\pi}\log\frac{1}{|f(\zeta)|} + (\text{調和関数}) \\ &= \frac{q}{2\pi}\log\frac{1}{|\zeta|} + \frac{q}{2\pi}\log\frac{1}{|\varphi(\zeta)|} + (\text{調和関数}) = \frac{q}{2\pi}\log\frac{1}{|\zeta|} + (\text{調和関数}), \end{aligned}$$

が成り立ち、単位円 $|\zeta| = 1$ の上で $p(f(\zeta)) = 0$ であることから、結局

$$p(f(\zeta)) = \frac{q}{2\pi}\log\frac{1}{|\zeta|}, \qquad |\zeta| \leq 1,$$

が導かれる。

次に、流速場の複素表示 $w(z) = u(z) - iv(z)$ の $z = f(\zeta)$ による単位円盤への引き戻し $w(f(\zeta))$ を考えよう。$ww(z)$ が原点を除いて正則関数であることから、$w(f(\zeta))$ もまた $0 = f^{-1}(0)$ を除く単位円盤で ζ の正則関数である。$z = f(\zeta)$ の逆写像を $\zeta = g(z)$ とおくと、$z \neq 0$ に対し、

$$p(z) = -\frac{q}{2\pi}\log|g(z)| = -\frac{q}{2\pi}\mathrm{Re}\log(g(z)),$$

$$\begin{cases} u(z) = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(x+iy) = \dfrac{q}{2\pi}\mathrm{Re}\dfrac{g'(z)}{g(z)} \\ \\ v(z) = -\dfrac{\partial p}{\partial y}(x+iy) = -\dfrac{q}{2\pi}\mathrm{Im}\dfrac{g'(z)}{g(z)} \end{cases}$$

より、

$$w(z) = u(z) - iv(z) = \frac{q}{2\pi}\frac{g'(z)}{g(z)}$$

がが得られる。$g(f(\zeta)) = \zeta$ よりこれを ζ で微分すると、$g'(f(\zeta))f'(\zeta) = 1$ がわかるので、結局、次が成り立つ。

$$w(f(\zeta)) = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{\zeta f'(\zeta)}, \qquad (0 < |\zeta| \leq 1)$$

Γ の外向き単位法線ベクトルの複素表示 $n(z) = n_1(z) + in_2(z)$ $(z \in \Gamma)$ は $f(\zeta)$ を使って次のように表されることがわかる。

$$n(f(\zeta)) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{|f'(\zeta)|}, \qquad |\zeta| = 1. \tag{2.2}$$

これより、圧力場の自由境界上の法線方向微分は $\frac{\partial p}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla p = \mathrm{Re}(nw)$ と書けることを用いて、

$$\frac{\partial p}{\partial n}(f(\zeta)) = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{|f'(\zeta)|}, \qquad |\zeta| = 1, \tag{2.3}$$

と表されることがわかる。

以上の結果は $\Omega(t)$, $\Gamma(t)$, $q(t)$, $p(x,y,t) = p(z,t)$, $f(\zeta,t)$, $n(z,t)$ などと時間 t にそれぞれが依存している場合にも容易に拡張されることを使って、$\beta = 0$ の場合の Problem 1.1 の等角写像による定式化を導こう。$\Gamma(t)$ の外向き法線方向速度 V_n は次のように表される。

$$V_n(f(\zeta)) = \mathrm{Re}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}(\zeta,t) n(f(\zeta,t),t)\right) = \left|\frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)\right|^{-1} \mathrm{Re}\left(\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)\overline{\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta,t)}\right). \tag{2.4}$$

結局 (2.4) と (2.3) を用いると、問題 1.1 は等角写像を使って次のように書き直せる。

Problem 2.1 $t \geq 0$ をパラメータとする単位円盤 $\{|\zeta| \leq 1\}$ 上の等角写像 $f(\zeta,t)$ で、次を満たすものを求めよ。

$$\begin{cases} f(0,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}(0,t) > 0, \\[2ex] \mathrm{Re}\left(\zeta \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)\overline{\dfrac{\partial f}{\partial t}(\zeta,t)}\right) = \dfrac{q(t)}{2\pi}, \qquad |\zeta| = 1, \\[2ex] \{f(\zeta,0);\ |\zeta| < 1\} = \Omega_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

これで、時間変化する未知領域 $\Omega(t)$ 上で定義されていた問題 1.1 が単位円盤上の関数 $f(\zeta,t)$ を求める問題に帰着することができた。

Problem 2.1 は単位円周上の方程式で、見なれない形である。これをシュワルツの積分公式を使って次のように変形すると見やすくなる。(2.6) の第 2 式の左辺は $\mathrm{Re}(\overline{\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,tt)}\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta,t))$ と書けるので、これを $|\frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)|^2 = |\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)|^2$ で割ると

$$F(\zeta,t) := \frac{\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta,t)}{\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)} \qquad (|\zeta| \leq 1),$$

$$\mathrm{Re} F(\zeta,t) = \frac{q(t)}{2\pi \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t)} \qquad (|\zeta| = 1),$$

を得る。ここで $F(\cdot,t)$ は単位円盤上で定義された正則関数になることがわかるので、シュワルツの積分公式 (Theorem 4.4) を用いると、Problem 2.1 は次のようにも表せる。

Problem 2.2 $t \geq 0$ をパラメータとする単位円盤 $\{|\zeta| \leq 1\}$ 上の等角写像 $f(\zeta,t)$ で、次を満たすものを求めよ。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(\zeta,t) = \zeta \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta,t) \dfrac{q(t)}{4\pi^2 i} \displaystyle\int_{|z|=1} \left|\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}(z,t)\right|^{-2} \dfrac{z+\zeta}{z(z-\zeta)} dz, \\[2ex] \{f(\zeta,0);\ |\zeta| < 1\} = \Omega_0, \quad f(0,0) = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}(0,0) > 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

このような等角写像を用いた定式化により、様々な興味深い厳密解や、初期境界が解析的な場合の解の局所存在などを得ることが出来る。([12], [13], [15], [16], [17], [18], [25], [33] 等)

3 フィンガリング現象と安定性解析

さて、数理モデルとしてのヘレショウ流の自由境界問題が最も興味を引く現象であるところのフィンガリング現象は、粘性流体の占める領域が後退しているときに観察される。流体をストローで吹き込むとき、つまり $q(t) > 0$ のときは、一様に流体領域が広がるのに対し、流体をストローで吸い込むとき、つまり $q(t) < 0$ のときは、一様ではなない自由境界の後退がみられる。その意味では § 2 の方法はある程度の成功をおさめているが、一方で、しばしば尖点 (cusp) が生じる。このような尖点は実際の実験では普通は見られない。これは実際のヘレショウ セルでは表面張力効果のために自由境界が尖ることが出来ないものと考えられる。つまり、尖点が生じているときは、その時点で表面張力効果が無視できなくなっており、表面張力 $\beta = 0$ とおいた仮定が妥当でなくなっているのである。本節では表面張力の効果について考察を行ってみる。

原点対称な解 $p^0(x,y,t)$ と $\Gamma^0(t) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x^2+y^2| = \rho^0(t)^2\}$ を考えよう。極座標 (r,θ) を用いて、次のような摂動を加えてみる。$\Gamma^\varepsilon(t) = \{(r,\theta);\ r = \rho^\varepsilon(\theta,t)\}$, ここで ρ^ε は形式的に、小さな正のパラメータ ε に関して次のような展開をされると仮定する。

$$\rho^\varepsilon(\theta,t) = \rho^0(t) + \varepsilon\rho^1(\theta,t) + O(\varepsilon^2). \tag{3.1}$$

特に、$\rho^1(\theta,t) = R(t)\cos k\theta$ または $R(t)\sin k\theta$ の形の摂動を考えることにすると、導出はここでは省略するが、$\Gamma^\varepsilon(t)$ が問題 1.1 を適当な $p^\varepsilon(x,t)$ とともに満足するために $R(t)$ が満たすべき必要条件として、

$$R'(t) = \lambda_k(t)R(t), \tag{3.2}$$

が得られる。ここで、$\lambda_k(t)$ は波数 k の摂動の拡大係数を表し、次で与えられる。

$$\lambda_k(t) = \frac{-1}{\rho^0(t)^3}\Big(\beta(k^3-k) + v^0(t)\rho^0(t)^2(k+1)\Big) \qquad (k \in \mathbf{N}), \tag{3.3}$$

但し、$v^0(t) = \rho^0_t(t)$ は $\Gamma^0(t)$ の外向き法線方向速度である。

式 (3.3) から、次のようなことがわかる。もし、$\beta \geq 0$ で $v^0(t) > 0$ の(すなわち、$\Gamma^0(t)$ は広がっている)とき、どんな摂動 $\cos k\theta$ も拡大せずに小さくなる($\lambda_k(t) \leq 0$ であることから)。言い換えれば、$\Gamma^0(t)$ は安定である。

一方、β が小さな正の数で $-v^0(t) > 0$ が比較的大きければ、すなわち $\Gamma(t)$ が急速に縮んでいるときは、有限個の $\lambda_k(t)$ だけが正である。この場合には、有限個の中間的な波長の摂動のみが成長し、円形かからずれることになる。おおざっぱに言って、フィンガリング現象はこのような安定化に働く小さな表面張力と不安定性を引き起こす後退する自由境界のバランスの結果生じていると言える。このような自由境界の不安定性をサッフマン・テイラーの不安定性という。

4 付録

4.1 非圧縮完全流体の渦無しの定常流れ

運動する液体や気体を流体という。流体は一般に 3 次元の運動だが、浅い川の流れなど、2 次元の流れとみなしても良い場合がしばしばある。以降、$x-y$ 平面内を 2 次元的に流れる流体について考えよう。

場所 (x,y)、時刻 t における流れの速度ベクトルを

$$\boldsymbol{u}(x,y,t)=(u(x,y,t),v(x,y,t)),$$

とする。特に、$\boldsymbol{u}$ が時刻によらず一定のとき、すなわち

$$\boldsymbol{u}(x,y)=(u(x,y),v(x,y)),$$

ののとき、このような流れを**定常流**と呼ぶ。ちなみに、数学で特定の現象だけをイメージすることを好まないときには、$\boldsymbol{u}$ のことを**ベクトル場**と呼ぶことが多いが、本講義は数式に具体的なイメージを付加し、具体的な現象の解析に数学を応用しようとする立場なので、$\boldsymbol{u}$ を流れの速度を表すベクトル場とみて、**流速場**と呼ぶことにする。

例えば、$\boldsymbol{u}=(x,y)$ のような流速場を考えると、流れに沿って体積の変化がおきている。これは空気など気体のように縮む流体の場合には可能だが、水などの液体のように縮まない流体の場合にはあり得ない流れである。気体などは**圧縮性流体**と呼ばれ、液体は**非圧縮性流体**と呼ばれる。(針のない注射器の先を指で押さえてピストンを下げるとき、中が空気ならば押し込むことが出来るが、水ならばほとんど押し込めない、という実験がこれに対応する。)

では、縮まない流体の流速場の特徴づけを考えてみよう。流体中に任意の有界領域 G をとってみる。G の境界を ∂G とすると、単位時間あたりに ∂G を通して G の内部から外部へ流出する流体の体積(今は2次元なので、正確には面積)Q は流れの速度ベクトルの ∂G に垂直な方向の成分を ∂G 上で積分したものに等しい。すなわち、

$$Q=\int_{\partial G}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}d\sigma=\int_{\partial G}(n_1u+n_2v)d\sigma,$$

に等しい。但しここで、$\boldsymbol{n}(x,y)=(n_1(x,y),n_2(x,y))$ $((x,y)\in\partial G)$ は ∂G 上の外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は ∂G 上の線素を表す。非圧縮性流体の場合には、G 内の流体の量は一定なので、$Q=0$ が任意の領域 G について成り立たなければならない。

ここで、2変数の場合のガウス・グリーンの定理を復習しておこう。

Theorem 4.1 (ガウス・グリーンの定理) G を滑らかな境界もつ有界な *2* 次元領域域とし、$\boldsymbol{u}$ を $\overline{G}$ で定義された滑らかなベクトル場とするとき、次が成り立つ。

$$\int\int_G \mathrm{div}\boldsymbol{u}dxdy=\int_{\partial G}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}d\sigma,$$

但し、ここで

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

である。

さて、ガウス・グリーンの定理より $Q=\int\int_G \mathrm{div}\boldsymbol{u}dxdy$ であることがわかるので、非圧縮性流体の場合には、G の任意性より、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0, \tag{4.1}$$

でなければいけないことがわかる。式 (4.1) はは**非圧縮性条件**と呼ばれ、そこに現れる divergence(ダイバージェンス)$\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の**発散**または**湧き出し**と呼ばれる。非圧縮性流体の場合にもし、

div$\boldsymbol{u} > 0$ ならばガウス・グリーンの定理より、$Q > 0$ になり、G 内で湧き水のように流体が湧いていることになるためである。普通は湧き出しは無いものとするので、(4.1) を仮定する。

一方、

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

は $\boldsymbol{u}$ の渦度（rotation, ローテーション）と呼ばれ、流体が持つ回転を表す量である。粘性を持たないサラサラした流体（完全流体と呼ばれる）の場合には、初期時刻に流体が渦度を持たなければ、時間がたっても渦度は 0 のままであることが知られていることから、次の渦無しの条件をしばしば仮定する。

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{4.2}$$

また、渦無しの条件 (4.2) が単連結領域（穴の空いていない領域）G で成り立つための必要十分条件は、G で定義されたある関数 $\Phi(x,y)$ が存在して

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \nabla\Phi(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right), \qquad (x,y) \in G,$$

が成り立つことが知られている。このような Φ を流速場 $\boldsymbol{u}$ の速度ポテンシャルと呼ばれ、$\nabla\Phi$ は Φ の勾配と呼ばれる。

結局、領域 Ω における縮まない流体の渦無しの流れは速度ポテンシャル Φ を用いて、

$$\Delta\Phi(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \nabla\Phi(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.4}$$

と表される。ここで、Δ はラプラシアンと呼ばれ、方程式 $\Delta\varphi = 0$ をラプラス方程式、それを満たす関数 φ は調和関数と呼ばれる。

4.2 等角写像

$x-y$ 平面上の点 (x,y) と複素数 $z = z + iy$ を同一視して考えると、平面全体が複素数全体 $\mathbf{C}$ と 1 対 1 に対応することがわかる。これを複素平面という。複素平面 $\mathbf{C}$ またはそれに含まれる領域 G で定義された複素数値関数 $f(z) \in \mathbf{C}$ が、任意の領域内の複素数 $\alpha \in G$ において微分可能、すなわち f の微分

$$f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha},$$

が存在するとき、f を G で定義された正則関数という。正則関数 f の実部を φ, 虚部を ψ とすると

$$f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$

次のコーシー・リーマンの方程式が成り立つことが f が正則であるための必要十分条件であることが知られている。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y), \tag{4.5}$$

また、f が正則ならば、コーシー・リーマンの方程式から φ と ψ は調和関数であることがわかる。特に、$(u(x,y), v(x,y))$ を § 4.1 でみた非圧縮完全流体の渦無しの流速場とするとき、$g(z) =$

$g(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$ で定義される関数 g は正則関数である。(この $g(z)$ は複素速度と呼ばれる。)

ある複素平面上の領域 G で定義された正則関数 f がその値域 $H = \{f(z) \in \mathrm{C};\ z \in G\}$ への 1 対 1 写像であるとき、f を等角写像という。等角写像は次のような性質を持つ。

Proposition 4.2

1. *2* つの等角写像の合成はまた等角写像である。
2. f を領域 G から H への等角写像とすると、その逆逆写像 f^{-1} も H から G への等角写像になる。
3. 等角写像は角度を保存する。
4. 等角写像の微分は *0* にならない。

等角写像を考えることの重要性は次の有名なリーマンの写像定理によって明らかになる。

Theorem 4.3 (リーマンの写像定理) $z-$ 複素平面上の単連結領域 (穴の空いていない領域) G が $G \neq \mathrm{C}$ ならば、$\zeta-$ 複素平面上の単位円盤 $|\zeta| < 1$ から G への等角写像 $z = f(\zeta)$ が存在する。

また、そのとき、任意の点 $z_0 \in G$ に対し、

$$f(0) = z_0, \qquad f'(0) > 0,$$

となる等角写像 f は一意的に存在する。

等角写像によって、調和関数は調和関数に移る。すなわち、$z = f(\zeta)$ を領域 G から H への等角写像として、$\varphi(z+iy) = \varphi(x,y)$ を H で定義された調和関数とすると、その合成 $\varphi(f(\zeta))$ は G 上の調和関数になる。

$z-$ 平面上の連続な閉曲線 Γ で囲まれた単連結な有界領域 Ω 上で、次のようなラプラス方程式の境界値問題を考える。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta\varphi(x,y) & = & 0, & (x,y) \in \Omega, \\ \varphi(x,y) & = & b(x,y), & (x,y) \in \Gamma, \end{array} \right. \tag{4.6}$$

但し、ここで、$b(x,y)$ は Γ 上で与えられた連続関数である。つまり、与えられた境界値 b を持つような Ω 上の調和関数 φ を求める問題である。この問題は、理工学においてしばしば現れる重要な問題であるが、リーマンの写像定理によって得られる単位円を Ω に写す等角写像 f を使うと単位円盤内の境界値問題に帰着させることが出来る。

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta U(\zeta) & = & 0, & |\zeta| < 1, \\ U(e^{i\theta}) & = & g(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{array} \right. \tag{4.7}$$

但し、ここで、$U(\zeta) = \varphi(f(\zeta))$, $g(\theta) = b(f(e^{i\theta}))$ である。境界値問題 (4.7) の解は、次のポワソンの積分公式で与えられる。

$$U(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\zeta|^2}{e^{i\theta} - \zeta|^2} g(\theta) d\theta.$$

また、この正則関数版として、次のシュワルツの積分公式が知られている。([24] p.42 等)

Theorem 4.4 (Schwarz integral formula) 複素単位円盤 $\{z \in \mathbf{C};\ |z| << 1\}$ 上で定義された正則関数 $F(z)$ の実部 $g = \mathrm{Re}F$ が $\{z \in \mathbf{C};\ |z| \le 1\}$ 上の連続関数に拡張できるとき、f は次の公式で与えられる。

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta + i\mathrm{Im}F(0).$$

参考文献

[1] 今井功: 複素解析と流体力学, 日本評論社, 1989 年

[2] 森正武, 杉原正顕: 複素関数論 II, 岩波書店, 1994 年

[3] 久須美剛: 大阪工業大学 修士論文,

[4] X. Chen; The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions, Arch. Rational Mech.. Anal. **123** (1993), pp. 117-151.

[5] X. Chen, J. Hong and F. Yi; Existence, uniqueness, and regularity of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem, Comm. P. D. E. **21** (1996), pp. 1705-1727.

[6] P. Constantin and L. Kadanoff; Dynamics of a complex interface, Physica D **47** (1991), pp. 450-460.

[7] P. Constantin and M. Pugh; Global solutions for small data to the Hele-Shaw problem, Nonlinearity **6** (1993), pp.393-415.

[8] J. Duchon and R. Robert; Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume I. Existence locale en temps, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **1** (1984), pp.361-378.

[9] C. M. Elliott and V. Janovský; A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary, Proc. Roy. Soc. Edin. **88A** (1981), pp. 93-107.

[10] J. Escher and G. Simonett; Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw mmodels, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), pp.1028-1047.

[11] J. Escher and G. Simonett; Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension, Adv. Diff. Eq. **2** (1997), pp.619-642.

[12] B. Gustafsson; On a differential equation arising in a Hele Shaw flow moving boundary problem, Ark. Mat. **22** (1984), pp. 251-268.

[13] B. Gustafsson; Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele Shaw flows, SIAM J. Math. Anal. **16** (1985), pp.279-300.

[14] H. S. Hele-Shaw; The flow of water, Nature **58** (1898), pp.34-36.

[15] S. D. Howison; Cusp development in Hele-Shaw flow with a free surface, SIAM J. Appl.. Math. **46** (1986), pp.20-26.

[16] S. D. Howison; Bubble growth in porous media and Hele-Shaw cells, Proc. Roy. Soc. Edin. **102A** (1986), pp.141-148.

[17] S. D. Howison; Fingering in Hele-Shaw cells, J. Fluid Mech. **167** (19886), pp.439-453.

[18] S. D. Howison; Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems, Euro. J. Appl. Math. **3** (1992), pp.209-224.

[19] M. Kimura; Time local existence of a moving boundary of the Hele-Shaw flow with suction, Euro. J. Appl. Math. (to appear).

[20] A. A. Lacey; Moving boundary problems in the flow of liquid through porous media, J. Austral. Math. Soc. (Ser. B) **24** (1982), pp.171-193.

[21] H. Lamb, Hyddrodynamics, 6th ed., Dover, (1932).

[22] W. W. Mullins and R. F. Sekerka; Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy, J. Appl. Phys. **35** (1964), pp.444-451.

[23] L. Paterson; Radical fingering in a Hele Shaw cell, J. Fluid Mech. **113** (1981), pp.513-529.

[24] Ch. Pommerenke; Boundary behaviour of comformal maps, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1991).

[25] M. Reissig and L. Vonwolfersdolf; A simplified proof for a moving boundary-problem for Hele-Shaw flows in the plane, Ark. Mat. **31** (1993), pp. 101-116.

[26] S. Richardson; Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel, J. Fluid Mech. **56** (1972), pp.609-618.

[27] S. Richardson; Some Hele Shaw flows with time-dependent free boundaries, J. Fluid Mech. **102** (1981), pp.263-278.

[28] P. G. Saffman; Selection mechanisms and stabilitty of fingers and bubbles in Hele-Shaw cells, IMA J. Appl. Math. **46** (1991), pp.137-145.

[29] P. G. Saffman and G. Taylor; The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, Proc. Roy. Soc. A **245** (1958), pp.312-329.

[30] M. Sakai; Quadrature Domains, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag **934** (1982).

[31] P. Tabeling, G. Zocchi and A. Libchaber; An experimental study of the Saffman Tayloor instability, J. Fluid Mech. **177** (1987), pp.67-82.

[32] G. Tryggvason and H. Aref; Numerical experiments on Hele Shaw flow with a sharp interface, J. Fluid Mech. **136** (1983), pp.1-30.

[33] A. N. Varchenko and P. I. Etingof; Why the boundary of a round drop becomes a curve of order four, American Mathematical Society, (1992).